# 744. 有界且可測ナ核ニヨル積分operatorニ就イテ

吉田耕作，三村征雄，角谷静夫（阪大）

$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ ニ於テ有界且ツ可測ナ核 $K(x, y)$ ニヨル積分 operator

$$g(y) = \int_0^1 f(x) K(x, y)\, dx ; \quad f, g \in (L)^{(1)}$$

---

(1) $L$ ハ $(0, 1)$ ニ於テ積分可能ナ函数 $f(x)$ 全体ノ作ル Banach 空間：$(L)$ デノ norm ハ $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

ハ(L)デノ線型 operator トシテ，一般ニハ，vollstetig デナイ。§2ニ例ヲ挙ゲテ之ヲ示ソウ。然シ次ノ定理ガ成立スル。

> 定理. $K(x,y)$, $M(x,y)$ ヲ何レモ有界且ツ可測ナ核トスルト 核 $N(x,y)=\int_0^1 K(x,z)M(z,y)\,dz$ ニヨル積分 operator ハ vollstetig.

ヨッテ談話 679 或ヒハ 680 ニ得ラレタ「Fréchet-Kryloff-Bogolioubof 定理ノ Banach 空間ヘノ拡張」ハ実ハ Fréchet 定理ノ略々完全ナ抽象化デアッタ。[1]

## §1. 定理ノ証明

(L)デノ compactness ヲ問題ニスルノダカラ Kolmogoroff-Riesz ノ定理[2]ヲ思ヒ付クノハ当然デアル。実際之ヲ使ヘバ容易ニ証明サレル。即チ

証明. $K, M, N$ 等ヲ $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ 以外デハ $0$ トシテ定義域ヲ擴張シテ置ク。$f$, $g$ 等モ従ッテ同ジク擴張シテ置ク。

Riesz ノ定理ハ次ノ通リデアル。

---

(1) 談話 679 ニ於テハ F-定理ガ完全ニ抽象化出来タ訳デハナイト述ベタケレドモ。

(2) M. Riesz: Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, Acta Szeged, 6 (1932-4), 136-142.

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ ナル如キ函數 $f(x)$ ノ作ル空間ヲ $(L)$ トスル。$(L)$ 内ノ部分集合 $\mathfrak{F}$ ガ $(L)$ ニ於テ compact デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ次ノ (1), (2), (3) ガ同時ニ滿足サレテヰルコトデアル。

(1) $\|f\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<M$ ガ任意ノ $f(x)\in\mathfrak{F}$ ニ對シテ成立スル如キ M ガ存在スル。

(2) $\lim\limits_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|\,dx=0$ ガ $f(x)\in\mathfrak{F}$ ニ關シテ一様ニ成立スルコト。

(3) 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $A=A(\varepsilon)$ ガ定マリ、任意ノ $f(x)\in\mathfrak{F}$ ニ對シテ $\int_{|f(x)|>A}|f(x)|\,dx<\varepsilon$ トナルコト。

Fubini-Tonelli ノ定理ニヨリ

$$g(y)=\int_0^1 f(x)K(x,y)\,dx,\quad h(z)=\int_0^1 g(y)N(y,z)\,dy$$

ト置イタトキ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(z+\delta)-h(z)|\,dz$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,|f(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,|K(x,y)|\,|M(y,z+\delta)-M(y,z)|$$

$$\leqq K\left\{\int_0^1|f(x)|\,dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|M(y,z+\delta)-M(y,z)|\,dy\,dz\right\}$$

(但シ $K=l.u.b.|K(x,y)|$)

ヲ得ル。ヨツテ $f(x)$ ガ $(L)$ ノ單位球 $\|f\|\leqq1$ ヲ動クトキ

一様ニ

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\delta\to 0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|h(z+\delta)-h(z)|\,dz=0,\\[2ex] l.\ u.\ b.\ |h(z)|\leqq KM,\quad (M=l.u.b.\,|M(x,y)|)\end{array}\right.$$

即チ $f$ ガ $\|f\|\leqq 1$ ヲ動クトキ $h(z)$ ノ集合ハ $(L)$ ノ norm ノ意味デ compact (Kolmogoroff-Riesz ノ定理), 從ッテ核 $N(x,y)$ ニヨル積分 operator ハ vollstetig デアル。 —— (以上) ——

注意. 次ノ如キ別証明ヲスルト定理ノ意味ガワカルト思フ。 談話 724 §11 ニ於ケルト全ク同様ニシテ核 $K(x,y)$ ニヨル積分 operator ハ schwach vollstetig. 由テ $\|f\|\leqq 1$ ノ像内ノ任意ノ無限集合カラ適當ニ部分列 $\{g_i(y)\}$ ヲ撰ブト $(L)$ ノ一点 $g_0(y)$ ニ弱收斂スル。 $(L)$ ノ共軛空間ハ $(M)$(1) ダカラ, $|M(y,z)|\leqq M$ ニヨリ各 $z$ ニ於テ

$$\lim_{i\to\infty}h_i(z)=h_0(z),\quad h_i(z)=\int_0^1 g_i(y)\,M(y,z)\,dy.$$

然シテ $l.\ u.\ b.\ |h(z)|\leqq KM$ ハ明カダカラ Lebesgue ノ定理デ

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1|h_0(z)-h_i(z)|\,dz=0.$$

即チ

---

(1) (M) ハ (0, 1) デ有界且可測ナ函数 $k(x)$ ノ作ル Banach 空間: (M) デノ norm ハ $\|k\|=$ essential maximum $|k(x)|$.

有界且可測ナ核ニヨル積分 *operator* ハ *schwach vollstetig* 且ツ $(L)$ ノ単位球ヲ $(M)$ ノ有界ナ部分ニ寫ス。然シテ斯クル *operator* ハ $(M)$ ノ有界ナ部分ニ入ッテルヤウナ $(L)$ ノ弱收斂点列ヲ $(L)$ ノ強收斂点列ニ寫ス。

ノデアル。

## § 2

$0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ ニ於テ $K(x, y)$ ヲ次ノ如ク定義スル。($x=1$ 又ハ $y=1$ ナルトキハ $K(x, y)$ ハ適當ニ定義スレバヨイ。コノ部分ハ *essential* デハナイ。ヨッテ § 2 ニ於テハ $(L)$ トシテ $0 \leqq x < 1$ ニテ定義サレ、且ツ $\int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty$ トナル如キ *measurable function* 全体ヲ考ヘルコトニスル)

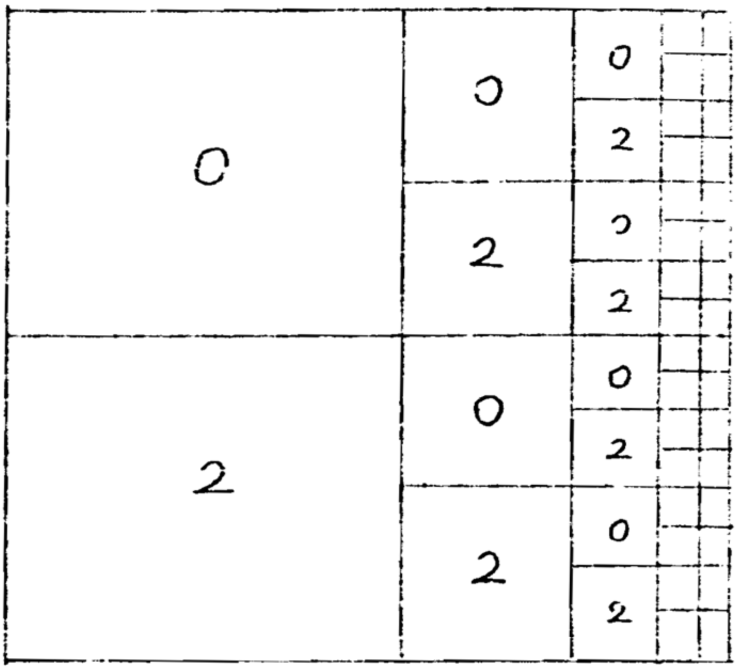
$$\begin{cases} 0 \leqq x < \frac{1}{2},\ 0 \leqq y < \frac{1}{2} & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 2 \\ 0 \leqq x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqq y < 1 & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{4},\ 0 \leqq y < \frac{1}{4} & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 2 \\ \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{4},\ \frac{1}{4} \leqq y < \frac{1}{2} & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 0 \\ \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{4},\ \frac{1}{2} \leqq y < \frac{3}{4} & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 2 \\ \frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{4},\ \frac{3}{4} \leqq y < 1 & \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \leqq x < \frac{7}{8},\ 0 \leqq y < \frac{1}{8} \quad \text{ナルトキハ} \quad K(x, y) = 2$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

-----ノ所ノ意味ハ右ノ圖ニヨッテ明カデアロウ。$K(x,y)$ ハ明カニ measurable デ且ツ有界デアル。シカモ任意ノ $x$ $(0\leq x<1)$ ニ對シテ $\int_0^1 K(x,y)\,dy=1$ デアルカラ $K(x,y)$ ハ一ツノ Markoff process ヲ表ハシテヰルトモ考ヘラレル。




今コノ $K(x,y)$ ヲ核トスル integral operator

$$g(y)=\int_0^1 f(x)\,K(x,y)\,dx$$

ガ $(L)$ ニ於ケル linear operator トシテ vollstetig (completely continuous) デナイコトヲ示サウ。

コノタメニ $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ ヲ $0\leqq x<1$ ニ於テ次ノ如ク定義スル：

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqq x<1-\dfrac{1}{2^n} \quad \text{ナルトキ} \quad f_n(x)=2^n \\ \text{其他ノ所ニテハ} \quad f_n(x)=0 \end{cases}$$

コレ等ノ $f_n(x)$ ガ $\|f_n\|=\int_0^1|f_n(x)|\,dx=1$ ヲ満足スルコトハ明カデアル。

然ルニ $g_n(y)=\int_0^1 f_n(x)\,K(x,y)\,dx$ ニヨッテ $g_n(y)$ ヲ定義スレバ $\{g_n(x)\}$ ハ $(L)$ ニ於テ compact デハナイ。実際 $g_n(y)$ ヲ計算スレバ

$$\frac{2k}{2^n} \leqq y < \frac{2k+1}{2^n},\ k=0,1,\cdots\cdots,2^{n-1}-1 \quad \text{ナルトキ}$$

$$g_n(y)=2$$

$$\frac{2k+1}{2^n} \leqq y < \frac{2k+2}{2^n},\ k=0,1,\cdots\cdots,2^{n-1}-1 \quad \text{ナルトキ}$$

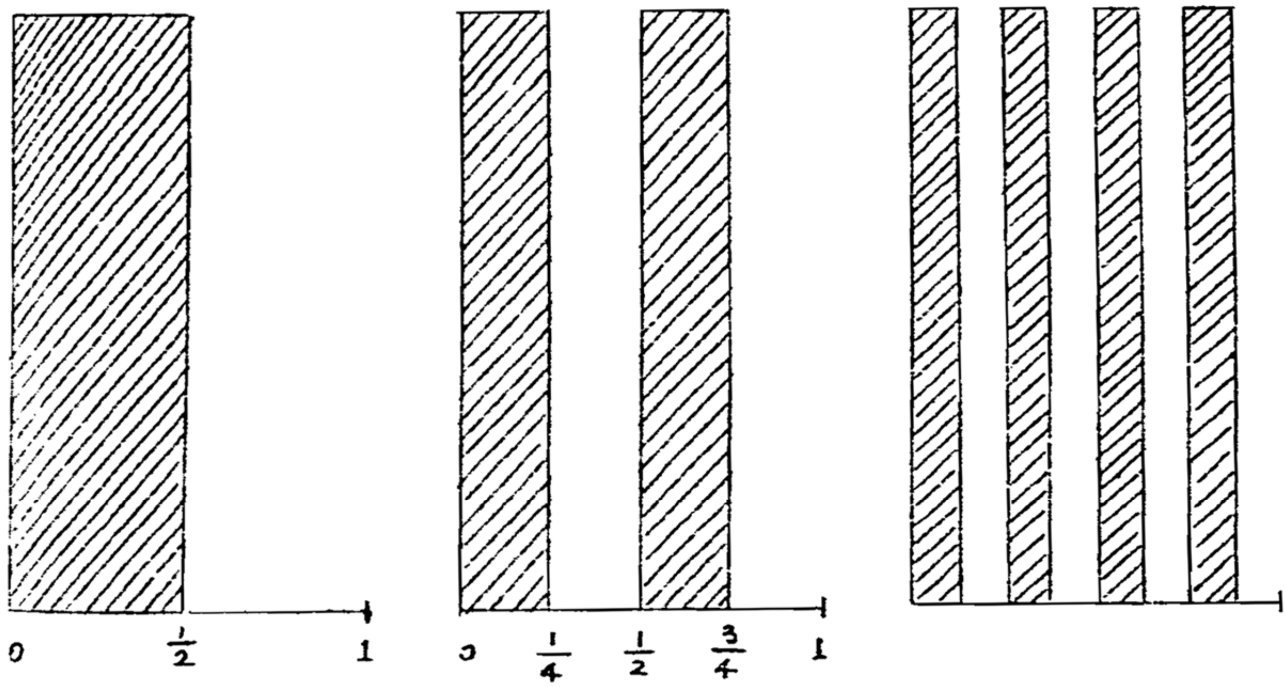
$$g_n(y)=0$$

トナリ、任意ノ $m, n\ (m \neq n)$ ニ對シテ

$$\|g_m - g_n\| = \int_0^1 |g_m(y)-g_n(y)|\,dy = 1.$$

トナル。ヨツテ $\{g_n\}$ ハ收斂スル部分列ヲ含ミ得ナイ。

$\int_0^1 |g_m(y)-g_n(y)|\,dy = 1$ トナルコトハ次ノ圖カラ明カデアロウ。




$g_1(y)$ $g_2(y)$ $g_3(y)$